## Sezione D15

# Didattica della Matematica

**M. Ascari, L. Bazzini, P. Tsamir,** Equazioni e disequazioni: un approccio integrato di aspetti algebrici e grafici

**G. T. Bagni,** Numeri e polinomi: un modello dell'Aritmetica di Robinson

**M. Barra,** Utilità del software Cabri e dei suoi aspetti dinamici per collegare settori diversi della matematica e per scoprirne alcune nuove proprietà

**M. G. Bartolini Bussi,** Il Laboratorio di Matematica: strumenti per la didattica dalla storia della geometria

**M. M. Becchere,** Il ruolo del laboratorio nelle dinamiche di classe: il caso dell'inserimento di un alunno portatore di handicap

**M. D'Aprile,** Dillo con parole tue

**F. Di Gennaro, D. Tondini,** Un progetto di presentazione in rete del sito: "Matematica e Società"

**F. Eugeni e R. Mascella,** Un teorema di caratterizzazione per la retta reale non archimedea

**F. Ferrara, C. Sabena,** Invertire l'approccio tradizionale all'analisi attraverso l'uso della tecnologia

**P. L. Ferrari,** Tecnologia informatica e sistemi di rappresentazione nell'insegnamento universitario della matematica

**F. Furinghetti, F. Morselli,** Interazione tra affettività e cognizione nei processi dimostrativi

**N. A. Malara, R. Fiorini,** La pratica dei ricercatori e la ricerca degli insegnanti: un esempio

**L. Bazzini, L. Bertazzoli, F. Morselli,** L'uso integrato dell'ambiente "carta e matita" e di cabri géomètre per promuovere le dinamiche mentali

**M. Pertichino, A. Montone, E. Faggiano,** Il Peer Tutoring in Matematica: un esempio di apprendimento cooperativo

**A. Pesci, A. Baldrighi, M. Torresani,** L'apprendimento cooperativo nell'educazione matematica: una ricerca in collaborazione tra scuola e università

**B. Piochi, R. L. Ancona,** Sul curricolo di matematica negli Istituti Professionali

**M. Reggiani,** Attività di laboratorio di matematica con un Computer Algebra System fra scuola media e biennio

**O. Robutti,** Il senso del grafico: un progetto in continuità dalla scuola materna alla scuola superiore

**A. Scimone,** La congettura di Goldbach tra storia e didattica

# EQUAZIONI E DISEQUAZIONI: UN APPROCCIO INTEGRATO DI ASPETTI ALGEBRICI E GRAFICI

*Marina Ascari (*), Luciana Bazzini (**), Pessia Tsamir (***)*

(*)Liceo Scientifico Statale "S. Allende", Rozzano (MI) , (**) Dipartimento di Matematica, Università di Torino

(***) School of Education, Tel Aviv University

*Ricerca effetuata in collaborazione con la Direzione Scolastica Regionale della Lombardia (borsa di ricerca per insegnanti, anno 2002-03)*

Le problematiche connesse agli studi sul pensiero algebrico e sulla didattica dell'algebra sono al centro di molti studi di carattere epistemologico, cognitivo e didattico. A questo proposito si sono riscontrate situazioni abbastanza simili in Italia e in Israele: tali similarità vanno da considerazioni di carattere generale sulla didattica dell'algebra, a riscontri più specifici sulle difficoltà incontrate dagli studenti di fronte a determinati argomenti.

Nella realtà scolastica dei due Paesi, Italia e Israele, le disequazioni sono trattate a livello di scuola secondaria superiore. In genere non si dà molto spazio alle discussioni, ma si enfatizza piuttosto l'aspetto algoritmico delle manipolazioni algebriche. Si dà cioè più spazio a domande del tipo: "Come risolvere la disequazione" piuttosto che a domande del tipo: "Perché risolvere in questo modo" o " Come posso essere sicuro che la soluzione sia corretta". Di più, in entrambi i Paesi si è riscontrato un senso di frustrazione da parte degli insegnanti di fronte alle difficoltà incontrate nell'insegnamento delle disequazioni . Partendo quindi da una base comune di esperienze, sia con gli insegnanti che con gli allievi, si è deciso di avviare uno studio comparativo mirato all'analisi dei comportamenti degli studenti di fronte a problemi, più o meno standard, riguardanti le disequazioni: i risultati di questo studio si trovano in Bazzini e Tsamir, 2002).

In questo studio l'analisi delle difficoltà degli allievi ha indotto un esame approfondito delle possibili cause, evidenziando i limiti di un'introduzione sequenziale dell'argomento "equazioni-disequazioni". Facendo riferimento al quadro teorico delineato da Arzarello, Bazzini e Chiappini (1994) si è rilevata la mancanza di un esplicito accento sul ruolo della denotazione di una data espressione algebrica (nel nostro caso equazioni e disequazioni): si veda Bazzini e Ascari (2000) e Bazzini e Tsamir (2002) Si è quindi passati alla programmazione di un percorso didattico basato sul concetto di funzione (e sul confronto dei valori assunti dalle funzioni) come elemento base per un'introduzione parallela (cioè non sequenziale) delle nozioni di equazione e disequazione.

Questo percorso prevede inoltre un approccio integrato di aspetti algebrici e grafici, da realizzare anche con il ricorso a tecnologie informatiche (in particolare l'uso del software DERIVE e di calcolatrici grafiche). I risultati di una sperimentazione pilota condotta in due classi seconde di Liceo scientifico saranno discussi nella presentazione orale.

**Bibliografia.**

Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G.P., 1994) *L'Algebra come strumento di pensiero, Analisi teoriche e considerazioni didattiche*, Quaderno n. 6 del CNR, Progetto strategico: Tecnologie e Innovazioni didattiche.

Bazzini L., 1997, Equazioni e disequazioni: riflessioni sul concetto di equivalenza, in Bazzini L. (ed) *La Didattica dell'Algebra nella Scuola Secondaria Superiore*, ISDAF, Pavia, (44-53).

Bazzini L., Ascari M., 2000, Disequazioni: il ruolo del segno, in Drouhard J.P., Maurel M.,(eds), *SFIDA, Actes des Seminaires 1997-1999*, IREM de Nice, (XII, 7-12)

Bazzini L., Tsamir P. 2002a), Disequazioni e grafici tra Algebra e Analisi: il rischio di comportamenti pseudostrutturali, *La matematica e la sua didattica,* (2, 2002), (190-209)

Bazzini L., Tsamir P. 2002b), Le disequazioni tra procedire e relazioni: uno studio comparativo su studenti Italiani e Israeliani, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate* vol.25 B, n.3 (247-270).

# Numeri e polinomi: un modello dell'Aritmetica di Robinson

GIORGIO T. BAGNI
Dipartimento di Matematica, Università di Roma «La Sapienza»

La ricerca di analogie e di differenze in situazioni diverse è matematicamente interessante: l'astrazione si basa sull'interpretazione di analogie significative, sulla considerazione di problemi analoghi in ambiti diversi. Dal punto di vista didattico è necessario guardarsi da fenomeni di generalizzazione impropria: l'analogia non può essere considerata alla stregua di un argomento dimostrativo; ma l'allievo potrà apprezzare somiglianze interessanti in ambiti diversi; quindi, opportunamente guidato, potrà rendersi conto della necessità del rigore, ad esempio nei passaggi da un ambito ad un altro. Il presente lavoro si rivolge primariamente agli insegnanti in formazione.

La teoria più nota per l'aritmetica (i numeri naturali con le usuali operazioni) è l'Aritmetica di Peano, $PA$; una teoria più debole è la teoria $Q$ di Robinson, che si ottiene da $PA$ togliendo il principio di induzione ed aggiungendo come assioma il teorema di $PA$ (dove $S$ è la funzione unaria successore): $\forall y\ (y \neq 0 \rightarrow \exists z\ (y = \mathrm{S}(z)))$.

Una teoria in genere ha più modelli: l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali con l'addizione e la moltiplicazione è il modello standard di $PA$; la costruzione di modelli di $PA$ non isomorfi a $\mathbf{N}$ è complicata e non può essere proposta a livello di scuola secondaria. Invece è semplice descrivere modelli di $Q$ non isomorfi a $\mathbf{N}$: ad esempio, nel presente lavoro indicheremo con $Z^*[x]$ l'insieme costituito dal polinomio nullo e dai polinomi a coefficienti interi con il coefficiente direttivo positivo: $Z^*[x]$ con l'addizione e la moltiplicazione è un modello di $Q$.

Dal punto di vista didattico è interessante sottolineare che $Z^*[x]$ non è un modello di $PA$: ad esempio, $\forall y\ \exists z\ (z+z = y \vee z+z = y+1)$ è vero in $\mathbf{N}$ ma non in $Z^*[x]$.

Per quanto riguarda l'ordine in $Z^*[x]$, definito in base agli assiomi di $Q$, per ogni naturale $n$ possiamo scrivere $n<g(x)$, con $g(x)$ non constante. In $Z^*[x]$ è: $0<1<\ldots<x-1<x<x+1<x+2<\ldots$

Se con $[x]$ indichiamo $\ldots x-1,\ x,\ x+1,\ x+2\ \ldots$(copia di $\mathbf{Z}$), scriviamo $Z^*[x]$ come $\mathbf{N}[x]$... dove affermiamo che la copia $[x]$ è adiacente a $\mathbf{N}$. Nessun $f(x)$ con grado 1 e coefficiente direttore maggiore di 1, o di grado maggiore di 1, è tale che $n<f(x)<x+a$. $Z^*[x]$ si esprime nella forma:

$$Z^*[x] = \mathbf{N}[x][2x]\ldots[x^2-2x][x^2-x][x^2][x^2+x][x^2+2x]\ldots[2x^2-2x][2x^2-x][2x^2][2x^2+x][2x^2+2x]\ldots[x^3]\ldots$$

Definiamo *p primo* in $Z^*[x]$ se è diverso da 0 e da 1 e non esistono due elementi di $Z^*[x]$, entrambi diversi da 1, il cui prodotto è $p$; dunque un polinomio non costante è primo se e solo se è irriducibile e primitivo. In $Z^*[x]$ per ogni intero $k$ il polinomio $x+k$ è primo, mentre il successore di un naturale primo $n \neq 2$ è pari e non è primo: in ambito polinomiale, ma non con riferimento ai naturali, esiste $y \neq 2$ tale che sia $y$ che il suo successore sono primi.

Per quanto riguarda la teoria additiva dei numeri, il teorema di Lagrange che afferma che ogni numero naturale è la somma di quattro quadrati non vale in $Z^*[x]$: è infatti banale provare che ogni polinomio di grado 1, in $Z^*[x]$, non è esprimibile come somma di quattro elementi quadrati.

Si possono esaminare in $Z^*[x]$ gli analoghi di altri teoremi che si provano in ambito numerico (come il teorema di Shrinel'man, che afferma che ogni naturale diverso da 0 e da 1 può essere espresso come somma di una quantità limitata di numeri primi). Per considerare infine una proposizione analoga alla congettura di Goldbach in $Z^*[x]$, si esaminano solo i polinomi non costanti. Si prova elementarmente che se il polinomio non costante $Q(x)$ non è primitivo, allora esistono due polinomi primi $A(x)$, $B(x)$ tali che: $Q(x) = A(x)+B(x)$.

# Utilità del software Cabri e dei suoi aspetti dinamici per collegare settori diversi della matematica e per scoprirne alcune nuove proprietà

*Mario Barra*

Dipartimento di Matematica, università di Roma "La Sapienza"

Gli aspetti dinamici del software Cabri verrano utilizzati:
- per mostrare alcune proprietà geometriche delle generalizzazioni del "triangolo di Tartaglia" ottenute attraverso i "triangoli aritmetici generalizzati" (forniscono la probabilità per le somme di distribuzioni uniformi[1]. Es.: somma di dadi);
- per mostrare correttamente alcuni aspetti della "legge dei grandi numeri" e per metterne in evidenza gli errori che possono essere collegati alle rappresentazioni con istogrammi delle distribuzioni di probabilità;
- per mostrare le densità ($B_d$) delle somme di d distribuzioni uniformi. Viene poi stabilito un collegamento geometrico con il caso discreto, ad esempio perché le densità e le probabilità sono ottenibili attraverso le differenze finite delle funzioni che rappresentano la misura di ipertetraedri o il numero di punti a coordinate intere che contengono. Gli oggetti geometrici di cui si tratta corrispondono alle sezioni di quadrati o di cubi la cui dimensione è data dal numero d di addendi;
- per dimostrare semplicemente, in modo geometrico, alcune proprietà dell B-spline $B_d$, per d=2, per mostrarne la corrispondenza per d=3 e nel caso generale, e per ritrovare le stesse proprietà nel caso discreto attraverso le corrispondenze stabilite precedentemente;
- per mostrare le "tassellazioni pulsanti" e il loro collegamento con la "T-equiscomponibilità continua".

1 Se i numeri aleatori che si sommano assumono soltanto due valori equiprobabili, si ottiene il triangolo di Tartaglia. Per una trattazione generale si può vedere: Barra M.: 2001, Ipersolidi e altri argomenti, Progetto Alice, N. 5, Vol. 2, Ed. Pagine, 191- 246.

# Il Laboratorio di Matematica:

# strumenti per la didattica dalla storia della geometria

*Maria G. Bartolini Bussi*

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata (Modena)
Università degli studi di Modena e Reggio Emilia

La comunicazione riguarda alcuni risultati degli studi sull'utilizzo in classe di strumenti classici (riga, compasso e tracciatori di curve; pantografi per trasformazioni; prospettografi; strumenti per la risoluzione di problemi, ecc.). Gli strumenti sono riproduzioni funzionanti di oggetti descritti in trattati risalenti ad epoche diverse, dall'antichità classica al XX secolo. Essi costituiscono una vasta collezione, in parte collocata presso il Laboratorio delle Macchine Matematiche del Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata di Modena, (www.macchinematematiche.unimore.it), aperto alle scuole per attività didattiche guidate. Alla collezione di strumenti reali si affiancano le collezioni di strumenti 'virtuali', animazioni e simulazioni interattive, schematiche o fotorealistiche, realizzate con diversi software didattici e/o professionali. Nella comunicazione si illustreranno brevemente le caratteristiche degli esperimenti didattici realizzati (aspetti storico-culturali e manipolativi) in cui è valorizzata la polisemia intrinseca negli strumenti. L'attività consente la costruzione di significati complessi e l'avvio di esplorazioni dinamiche reali per la produzione di congetture e la costruzione di dimostrazioni. Sarà data informazione sulle iniziative di divulgazione già realizzate o in programma (Mostre *Theatrum Machinarum, Perspectiva Artificialis,* ecc.).

## Riferimenti bibliografici

Bartolini Bussi M. G. (1998), Drawing Instruments : Theories and Practices from History to Didactics, *Documenta Mathematica – Extra Volume ICM 1998*, vol. 3, 735-746.

Bartolini Bussi M.G. (2001), Ricerca in didattica della matematica: alcuni studi italiani, *Boll. Un. Mat. Ital. Sez. A, La Matematica nella Società e nella Cultura*, Serie VIII, IV-A, pagg. 117-154.

Bartolini Bussi M. G., Mariotti M. A. & Ferri F. (in press), Semiotic mediation in the Primary School:Durer's glass in Hoffmann H., Lenhard J. & Seeger F. (eds.) *Activity and Sign – Grounding Mathematics Education.*(Festschrift for Michael Otte), Kluwer Academic Publishers.

Pergola M. (1999), Modelli fisici, macchine e documenti storici nell'insegnamento e apprendimento della Matematica, comunicazione su invito al XVI Congresso Nazionale dell'U.M.I. (Napoli, 1999).

bartolini@unimore.it

---------------

*Mathematics Subject Classification.* Classificazione AMS 1991: 97A15, 98A15 ; 2000: 97-02, 97Cxx.
Finanziamenti della Commissione Europea (5° Programma Quadro: *Maths Alive*) e del Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata di Modena. Membri del gruppo di ricerca: M. Bartolini Bussi (responsabile), M. Maschietto, M. Boni, F. Ferri, A. Martinez, M. Pergola, M. Turrini, C. Zanoli.

# Il ruolo del laboratorio nelle dinamiche di classe: il caso dell'inserimento di un alunno portatore di handicap[1]

*Autore: Maria Maddalena Becchere*

Scuola Superiore, CRSEM – Cagliari -

Scopo della comunicazione è quello di presentare un'esperienza che ha affrontato la problematica dell'utilizzazione di un ambiente di laboratorio, anche informatico con l'uso di Cabri, nell'integrazione di un alunno portatore di handicap affetto da ritardo delle prestazioni cognitive e disturbi dell'attenzione.
L'esperienza ha coinvolto una prima classe dell'Istituto Tecnico per le Attività Sociali (I.T.A.S) "G. Deledda" Cagliari nel biennio 2001/2002 e 2002/2003.
Data la complessità della situazione, il consiglio di classe si prefiggeva, per l'alunno, obiettivi quasi esclusivamente relazionali mentre, dal punto di vista cognitivo, aveva studiato un percorso individualizzato come previsto dai programmi ministeriali.
Dal punto di vista della Matematica si è ritenuto che il coinvolgimento del gruppo classe, in un ambiente di laboratorio, ed in particolare in quello dinamico di Cabri, potesse favorire, non solo, il raggiungimento di tali obiettivi, ma anche il coinvolgimento collettivo in un percorso di apprendimento significativo.
L'attività sperimentale ha riguardato argomenti di matematica e fisica, in particolare la costruzione di figure geometriche e le loro proprietà elementari, la risoluzione di problemi, la costruzione di schede concernenti semplici esperimenti di fisica. Dal punto di vista metodologico si è lavorato in gruppi di tre alunni di cui due con il ruolo di esecutori e uno con funzione di osservatore/relatore.
Per il gruppo classe, nell'ambiente di laboratorio, si sono rivelate particolarmente positive: la possibilità di disegnare le figure geometriche, la verifica immediata delle proprietà, la possibilità di cancellare e correggere immediatamente, la possibilità di auto-regolamentare i tempi individuali di apprendimento nella ricerca della soluzione di un problema, soprattutto nell'interazione con CABRI e la possibilità di coinvolgimento collettivo nella costruzione-argomentazione dei saperi matematici.
I risultati consentono di affermare che l'attività nel clima di laboratorio ha portato all'integrazione dell'alunno nel gruppo classe attraverso il riconoscimento di un suo "spazio" e "ruolo", dove si è sentito protetto, rispettato e quindi libero di manifestare le sue, pur esigue conoscenze. Allo stesso tempo, ha giocato in favore di altri alunni con difficoltà, non dichiarate, e dell'intera classe.

[1] Lavoro eseguito nell'ambito del co-finanziamento 2001

# Dillo con parole tue


Margherita D'Aprile ([1])
Dipartimento di Matematica - Università della Calabria
Ponte Bucci, cubi 30 - 31 - Arcavacata di Rende
m.daprile@unical.it


Si illustrano i risultati di una ricerca svolta dal nucleo di ricerca didattica di Cosenza (Paola Armentano, Pasquale Cozza, Rossana D'Alessandro, Caterina Lazzaro, Geltrude Rossi, Anna Luisa Scarnati, Gianfranco Scarpino, Grazia Servi, M. D'Aprile, A. Squillace) che sono oggetto di un articolo per *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate.*

Avendo maturato la consapevolezza di quanto le difficoltà in matematica siano legate a quelle nella comunicazione linguistica, il gruppo si è posto il problema della individuazione di rimedi efficaci. Nell'anno scolastico 2001/2002 sono state organizzate attività di laboratorio matematico, in alcune classi di prima superiore, per aiutare gli studenti a verificare e rafforzare la padronanza della lingua naturale nel contesto della comunicazione matematica. È stato utilizzato un modello di scheda proposto da Rosetta Zan, composto di due parti identiche, una da usare prima che in classe venisse ripreso un argomento già conosciuto dagli studenti, le equazioni di primo grado, l'altra dopo le lezioni dell'insegnante.

L'analisi delle risposte degli allievi porta a riconoscere che, nonostante l'attenzione

posta nell'introdurre i termini tecnici con abbondanza di esempi e di motivazioni, non si è riusciti a far sì che la maggioranza degli studenti coinvolti si impadronisse del significato dei termini.

L'auto-osservazione del nostro gruppo al lavoro e la lettura delle risposte degli studenti inducono a formulare l'ipotesi che le radici dell'insuccesso siano profonde; fra di esse, la resistenza a modificare il nostro linguaggio di insegnanti, l'insensibilità (indotta dalla lunga familiarità con il linguaggio tecnico) a cogliere le artificiosità inutili del gergo cui siamo avvezzi e le continue insidiose sovrapposizioni tra termini tecnici e parole del linguaggio quotidiano. Riteniamo che per tentare di risolvere il problema sia necessario dare maggior spazio alla matematica "parlata". Sarà necessario cercare strumenti per vigilare in maniera efficace sulle nostre parole di insegnanti, ed impegnarsi di più ad ascoltare le parole degli studenti.

---

[1] *Mathematics Subject Classification (AMS):* 97B, 97C


Ricerca finanziata dall'Università della Calabria.

**Fernando Di Gennaro, Daniela Tondini**
**Dipartimento MET, Università di Teramo**

## Un progetto di presentazione in rete del sito : "Matematica e Società"

Nell'ambito delle attività del Dipartimento MET dell'Università di Teramo si presenta a grandi linee lo sviluppo di un progetto di un sito dal titolo : "Matematica e Società", progetto che si articola in circa 40 sottovoci da "Astornomia e Matematica", "Arte e Matematica", fino a " Zadig o del paradigma indiziario".
Hanno aderito al progetto due Dipartimenti Universitari, un Osservatorio Astronomico, una Accademia, la sede regionale dell'Istat e circa 13 Scuole dalle Elementari all'Università.
L'Accademia Piceno Aprutina fornirà il supporto provvisorio on-line per le verifiche in rete e la Scuola Media "D'Alessandro- Romani" fornirà il laboratorio multimediale per l'archiviazione e la messa in rete del materiale raccolto e prodotto.
Il Dipartimento MET è il capofila del progetto coordinato da Fernando Di Gennaro e Daniela Tondini.
Il progetto a carattere regionale è stato finanziato dall'IRRE Abruzzo e si inquadra nelle attività relative al protocollo d'intesa MIUR-MATHESIS.
Il progetto prevede anche la realizzazione di un Convegno di studi sulle tematiche dei siti dedicati alla divulgazione e sui siti dedicati ai Musei.

Di Gennaro - Tondini
Dipartimento MET – Coste S.Agostino
67100 TERAMO
dtondini@yahoo.it

# Un teorema di caratterizzazione per la retta reale non archimedea.

**Franco EUGENI** (eugenif@t in.it) **e Raffaele MASCELLA**
**Dipartimento MET,Università di Teramo.**

Nello studio dei fondamenti della Geometria Euclidea raramente si è fissata l'attenzione sulla retta Euclidea come ente a se stante. Usualmente gli assiomi caratterizzanti sono assegnati per introdurre la geometria piana e la geometria della retta nasce, in questo contesto, come geometria indotta dal piano sulla retta. Del resto, come ben noto, una qualunque definizione di retta euclidea reale conduce ad una struttura equivalente al campo ordinato dei numeri reali corredato da una nozione di congruenza tra segmenti. Da un punto di vista storico gli unici tentativi di definizione della retta euclidea, come ente a se, sono quelli dovuti a M. Pash e a G. Peano.

In [2] abbiamo presentato un'assiomatica per la retta euclidea reale che parte dagli assiomi di Peano, li completa in termini di assiomi di congruenza e di continuità. Tale assiomatica permette la costruzione dell'isomorfismo con il campo reale. Ancora in [2] si prova che gli assiomi con i quali G. Peano definisce la sua relazione ternaria dello *"stare fra …"*sono equivalenti ad assegnare una relazione d'ordine totale. In [3] si presenta un'assiomatica riferita agli assiomi di ordinamento totale che sintetizza l'intero processo della costruzione dell'isomorfismo con il campo reale.

In questo contesto chiameremo **retta reale non archimedea** ogni struttura $(L, \leq, \equiv)$ che soddisfi agli assiomi per la retta euclidea (compreso il Postulato di Cantor) ma non necessariamente il Postulato di Eudosso-Archimede.

Presentiamo ora un *nuovo esempio di retta non archimedea* con un modello che costituisce una generalizzazione del modello - puramente geometrico e immerso in un piano euclideo - introdotto da G.Veronese in [4]. Il modello di Veronese è l'unico modello, che non soddisfi il Postulato di Eudosso-Archimede, noto in letteratura; esso è stato successivamente presentato in una forma algebrica equivalente in [1], anche per ottenerne una rappresentazione non immersa in un piano euclideo.

Sia $(G, +, \leq)$ un gruppo abeliano ordinato e sia $(R, +, \leq)$ il gruppo additivo dei reali. Definiamo nel prodotto cartesiano $G \times R$ una relazione d'ordine $\leq$ ed una relazione di equivalenza $\cong$ definite $\forall g_1, g_2 \in G$, $\forall r_1, r_2 \in R$, nel modo seguente:

(1) $(g_1, r_1) \leq (g_2, r_2)$ in $G \times R \iff g_1 < g_2$ in $G$ ovvero $g_1 = g_2$, con $r_1 \leq r_2$ in $R$ ;

(2) $[(g_1, r_1), (g_2, r_2)] \cong [(g_3, r_3), (g_4, r_4)]$ in $G \times R \iff g_2 - g_1 = g_4 - g_3$ in $G$, $r_2 - r_1 = r_4 - r_3$ in $R$.

Si prova facilmente che $(G \times R, \leq, \cong)$ è una retta non necessariamente archimedea che è archimedea se e solo se il gruppo G si riduce al solo elemento neutro. Inoltre se il gruppo G coincide con il gruppo additivo ordinato degli interi relativi Z allora il modello $(Z \times R, \leq, \cong)$ è isomorfo al modello di Veronese come provato in Eugeni - Mercanti [1].

Si sono dimostrati i seguenti due teoremi:

**Teorema 1.** Sia $(L, \leq, \equiv)$ una retta non necessariamente archimedea. Allora esiste un gruppo ordinato abeliano $G$ tale che $(L, \leq, \equiv)$ e isomorfa a $(G \times R, \leq, \cong)$.

**Teorema 2.** Siano $(G_1 \times R, \leq, \cong)$, $(G_2 \times R, \leq, \cong)$ due rette non necessariamente archimedee. Le due rette sono isomorfe se e solo se lo sono $G_1$ e $G_2$ .

## Riferimenti bibliografici

[1] Eugeni F., Furneri S., Mercanti F. (1999), Una presentazione delle Geometrie non Archimedee, in: Atti del Congresso Nazionale della Mathesis 1999, Edigrafital, Teramo, 101-111.

[2] Eugeni F., Mascella R., Un'assiomatica per la retta euclidea reale alla maniera di Peano, in: Critica dei fondamenti (a cura di F. Eugeni), Edigrafital, Teramo, 2002, 37-62.

[3] Eugeni F., Mascella R., La retta euclidea reale a partire da una relazione d'ordine, Per. di Mat., 3 (2001), 45-56

[4] Eugeni F., Mascella R., Un piano non archimedeo derivato da un piano di traslazione, in: Critica dei fondamenti (a cura di F. Eugeni), Edigrafital, Teramo, 2002, 91-98.

# Invertire l'approccio tradizionale all'analisi attraverso l'uso della tecnologia

*Francesca Ferrara, Cristina Sabena*
Dipartimento di Matematica, Università di Torino

Il nostro studio si inserisce in un progetto a lungo termine che affronta problemi di ricerca didattica in analisi matematica. La scienza cognitiva ha recentemente messo in luce l'esistenza di legami profondi tra il modo in cui interagiamo con la realtà fisica e la nostra concettualizzazione in matematica (es. Lakoff & Nùñez, 2000). Riteniamo pertanto significativo studiare un approccio all'analisi che permetta agli studenti, prima di affrontare la teoria in modo sistematico, di agire con il proprio corpo in campi di esperienza opportuni. Un approccio, cioè, che renda direttamente accessibili concetti familiari ai ragazzi e, nel contempo, fondanti per uno sviluppo matematico successivo. Nel senso appena descritto, i due concetti di *linearità locale* di una curva e di *area sottesa* dal grafico di una funzione possono essere considerate *radici cognitive* dell'analisi (Tall, 2000).

In questa prospettiva, sono state condotte due sperimentazioni che hanno coinvolto classi di liceo scientifico (tradizionale e sperimentale P.N.I.), sia del biennio che del triennio. Nella prima, studenti dal primo al terzo anno sono stati introdotti ai concetti di funzione e della sua derivata attraverso lo studio del tasso di variazione su grafici (relativi a moti di vario tipo), ottenuti usando sonar e calcolatrici grafico-simboliche (Ferrara & Robutti, 2002). Nella seconda, studenti degli ultimi tre anni hanno affrontato, sia in ambiente carta-matita sia con calcolatrici grafico-simboliche, problemi di approssimazione di misure (aree e lunghezze) per concettualizzare l'integrale definito (Robutti & Sabena, in stampa).

I percorsi, sebbene duali e complementari, hanno elementi comuni di novità: lo studio di derivata e di integrale prima di introdurre il limite, che nella sistemazione teorica è il loro fondamento; il fatto di partire dalla percezione (movimento, grafici, aree, ...) per arrivare in ultimo ai simboli. Questa inversione didattica è fortemente supportata dall'uso della tecnologia, che deve essere integrata nel processo di apprendimento, piuttosto che rimanere un elemento esterno ad esso, come recenti studi di scuola francese mettono in evidenza (es. Lagrange, 2000).

## Bibliografia

Ferrara, F. & Robutti O. (2002). A graphical approach to function through body motion. In: L. Bazzini & C. Whybrow Inchley (eds.), *Proceedings of CIEAEM 53*, Verbania, Italy, 321-326.

Lagrange, J.B. (2000). L'intégration d'instrumentes informatiques dans l'enseignements: une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics*, **43**, 1-30.

Lakoff, G. & Nùñez, R. (2000). *Where Mathematics comes from: how the embodied mind brings Mathematics into being*. New York: Basic Books.

Robutti, O. & Sabena, C. (in stampa). La costruzione del significato di integrale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*.

Tall, D. (2000). Biological brain, mathematical mind & computational computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In: W. Yang, S. Chu & J. Chuan (eds.), *Proceedings of the Fifth Asian Technology Conference in Mathematics*, Chiang Mai, Thailand, December 2000, 3–20.

Via Carlo Alberto 10, 10123 - Torino
*e-mail address*: ferrara@dm.unito.it
sabena@dm.unito.it

1991 *Mathematics Subject Classification*. 00A35.

# Tecnologia informatica e sistemi di rappresentazione nell'insegnamento universitario della matematica

*Pier Luigi Ferrari*
Dipartimento di Scienze e Tecnologie Avanzate
Università del Piemonte Orientale 'Amedeo Avogadro' – sede di Alessandria

In questo lavoro si presentano alcune idee per abbozzare un corso introduttivo di matematica per studenti delle Facoltà di Scienze (in particolare, per i corsi triennali delle aree biologica, chimica e ambientale). La preparazione matematica iniziale che è lecito attendersi dalla maggior parte degli studenti è discussa dai punti di vista delle competenze matematiche e delle convinzioni sulla matematica. Vengono anche discusse le competenze matematiche necessarie per il proseguimento degli studi e sono delineati gli obiettivi raggiungibili in base ai dati iniziali, al tempo e alle risorse disponibili (laboratori, tutorato, assistenza on-line). Vengono anche messe in luce le caratteristiche della preparazione richiesta, che dovrà essere orientata alla flessibilità più che all'esecuzione meccanica di procedimenti. Nel seguito sono illustrate le caratteristiche di un percorso di matematica che metta gli studenti in condizione di raggiungere effettivamente e in un tempo ragionevole gli obiettivi delineati. Tale percorso dovrà utilizzare ampiamente rappresentazioni multiple (nel caso delle funzioni: linguaggio verbale, grafici, tabelle, formule) con enfasi sul loro coordinamento. Nel caso delle funzioni è ritenuta fondamentale la capacità di cogliere alcuni collegamenti fra grafici e formule. Per raggiungere questi obiettivi è necessario l'ausilio della tecnologia informatica. Sistemi di Computer Algebra (CAS) o programmi statistici possono essere utilizzati con diverse funzioni: essi mettono a disposizione diversi sistemi di rappresentazione con gli algoritmi collegati e in molti casi consentono alcune conversioni, cioè la traduzione di una rappresentazione da un sistema all'altro, consentendo di rappresentare diverse idee matematiche (come ad esempio una funzione attraverso un grafico) senza troppi requisiti teorici ed evitando allo studente l'esecuzione di un'ampia mole di calcoli (come ad esempio nella generazione di una tabulazione numerica di una funzione).
La capacità di interpretare e produrre testi verbali, formule, tabelle e grafici e di passare da una rappresentazione all'altra non è tuttavia spontanea ma deve essere sviluppata e consolidata attraverso attività specifiche. Tali attività dovranno anche farsi carico delle convinzioni degli studenti nei confronti della matematica e del suo apprendimento. Per molti studenti infatti la matematica è un'attività essenzialmente esecutiva, e le rappresentazioni hanno prevalentemente funzioni di supporto all'esecuzione di procedimenti, a scapito delle altre funzioni semiotiche. Per questo sono spesso proposti agli studenti questionari e problemi che richiedono loro di spiegare in forma scritta qualche idea o metodo matematico. Inoltre, sono incoraggiate discussioni all'interno di gruppi di studenti (guidati da un tutore laureato), insieme con problemi di traduzione dal linguaggio parlato a quello scritto.
La presentazione prenderà particolarmente in esame le derivate e lo sviluppo delle concezioni collegate e la transizione tra i grafici e le rappresentazioni analitiche delle funzioni.

Corso Borsalino 54 - 15100 Alessandria - I
*pferrari@unipmn.it*

# Interazione tra affettività e cognizione nei processi dimostrativi

*Fulvia Furinghetti*, Francesca Morselli***

* Università di Genova, ** Università di Torino

Nel nostro intervento discutiamo come due studenti del quarto anno del Corso di Laurea in Matematica (Università di Genova) affrontano il compito: "Dimostrare che la somma di due numeri primi tra loro è prima con ciascuno di essi" (si veda Euclide VII, 28). Agli studenti era stato richiesto di produrre una dimostrazione scritta della proposizione e inoltre di esplicitare il più possibile il proprio "flusso di pensieri" (congetture, dubbi, difficoltà, idee). L'esperienza è documentata nella tesi di laurea in matematica di Francesca Morselli.

L'analisi dei due protocolli raccolti evidenzia che la qualità e modalità del ragionamento prodotto dipendono non solo dalla preparazione ed abilità dello studente (fattori cognitivi), ma anche dai fattori affettivi (McLeod, 1992; Schoenfeld, 1992; Thompson, 1992). I protocolli rappresentano due diversi modi di affrontare il problema, sia per quanto riguarda la costruzione della dimostrazione che per quanto riguarda il modo di "vivere il problema".

Dal punto di vista cognitivo si rileva la mancata scelta di condurre il ragionamento per assurdo e, più in generale, difficoltà nell'usare in maniera operativa le definizioni e scarsa padronanza delle tecniche dimostrative. Dal punto di vista affettivo emerge l'influenza della convinzione su di sé (*self-confidence*) e sull'attività matematica. L'analisi di questi elementi permette di approfondire il rapporto che il soggetto instaura con il problema: quali sono le ragioni che spingono all'adozione di una certa tecnica dimostrativa, quali aspettative nutre il soggetto nei confronti di tale tecnica, in quale modo il soggetto vive le fasi di realizzazione della dimostrazione.

Nei due casi presentati si osserva una diversa visione della matematica, che, unita ad una diversa percezione delle proprie capacità e competenze, influenza in maniera differente il comportamento all'interno dell'attività di dimostrazione. Si sottolinea come l'interazione tra fattori affettivi e cognitivi sia forte in entrambi i casi, ed in particolare come la visione dell'attività matematica influisca sulla scelta della strategia e, soprattutto, sul rapporto tra la strategia adottata ed il soggetto stesso. Nel primo caso (Fiore) convinzioni penalizzanti sull'attività matematica ed un basso grado di self-confidence inibiscono il ragionamento, che si ferma al livello della riproduzione e non diventa mai davvero produttivo; nel secondo caso (Booh), le convinzioni sull'attività matematica ed un buon grado di *self-confidence* portano il soggetto ad agire attivamente, ma anche a non saper o voler passare dal piano intuitivo al formale.

E-mail addresses: *furinghe@dima.unige.it, **fraemme@libero.it

# La pratica dei ricercatori e la ricerca degli insegnanti: un esempio

**Nicolina A. Malara, Dipartimento di Matematica, Università di Modena**
**Roberta Fiorini, Scuola Media Statale, San Cesario, Modena**

Si intende relazionare su quanto attuato nell'ambito di un progetto, rivolto ad insegnanti in servizio e finalizzato ad affinare la loro professionalità sul versante della ricerca, realizzato in convenzione tra MIUR e diversi Dipartimenti di Matematica Italiani (il cosiddetto progetto "Dutto").
La presentazione sarà svolta a due voci e consisterà essenzialmente in due parti.
Nella prima parte il ricercatore esporrà le scelte culturali e le linee metodologiche del lavoro svolto in un intero anno con un gruppo di insegnanti, delineando:

- il progetto ArAl di rinnovamento dell'aritmetica in chiave pre-algebrica, il suo quadro teorico e le unità considerate per l'implementazione nella classe;
- la tipologia del lavoro con gli insegnanti e nelle classi;
- i risultati, gli elementi di riflessione e le consapevolezze raggiunte.

Nella seconda parte l'insegnante parlerà dei risultati delle sperimentazioni in una classe di I media dell'unità 'dalla bilancia all'equazione", trattando i seguenti punti:

- questioni di contenuto (la consegna chiave: prima rappresento poi risolvo, dalla rappresentazione dell'equilibrio della bilancia al segno di uguaglianza; il processo di conquista della lettera; il conflitto tra procedure aritmetico-intuitive e procedure algebriche; la crescita culturale dei ragazzi);
- questioni psicologiche (l'impatto dell'attività sui ragazzi; le difficoltà; l'influenza delle dinamiche di gruppo; l'impatto su di sé).

Si concluderà con un accenno alla ricaduta di questo lavoro sul versante dell'insegnamento e della ricerca.

**Bibliografia**

Malara N.A.: 2001, Aspetti relazionali dell'aritmetica e avvio al pensiero algebrico, in Bazzini L. (a cura di) *"Scuola a che punto siamo?"* 21-31

Malara N.A., Navarra G., 2001, "Brioshi" and other mediation tools employed in a teaching of arithmetic with the aim of approaching algebra as a language, proc. *ICMI Study on Algebra* (Melbourne, Australia, Dicembre 2001), vol. 2, 412-419, in versione italiana in Malara N.A. & Al. (a cura di), *Processi didattici innovativi per la matematica nella scuola dell'obbligo*, Pitagora Editrice, Bologna, 211-222

Malara N.A., Navarra G., 2002, Esperienze e prospettive di innovazione nella scuola dell'obbligo per un approccio precoce all'Algebra come linguaggio, *Scuola e Città*, 83-95

Malara N.A., Navarra G.: 2003, *ArAl Project: Arithmetic pathways towards favouring pre-algebraic thinking,* Pitagora Editrice, Bologna

Malara N.A., Navarra G.: 2003, Influences of a procedural vision of arithmetic in algebra learning, presentazione al WG 2 'Algebra' a CERME 3 (Bellaria, Italy), in stampa sui proceedings

# L'USO INTEGRATO DELL'AMBIENTE "CARTA E MATITA" E DI CABRI GÉOMÈTRE PER PROMUOVERE LE DINAMICHE MENTALI

*Luciana Bazzini (*), Luisa Bertazzoli (**), Francesca Morselli (*)*

(*) Dipartimento di Matematica, Università di Torino (**) Scuola Media Statale "G. Carducci", Brescia

Questo intervento analizza la costruzione del significato di funzione attraverso un percorso didattico in cui si alternano modalità di lavoro diverse (lavoro individuale, di gruppo, discussione di classe) in ambienti diversi (ambiente "carta e matita", software di geometria dinamica Cabri Géomètre).
Il teaching experiment, realizzato in una classe terza media, si inserisce in un progetto più ampio volto ad introdurre i concetti di equazione e disequazione a partire da quello di funzione. Secondo Bazzini e Tsamir (2002) infatti un approccio "funzionale" all'algebra mira a privilegiare gli aspetti relazionali come prerequisito per la reale comprensione delle procedure. Per quanto riguarda il concetto di funzione, Arzarello et al. (2001) sottolineano che le funzioni possono essere concepite dagli studenti in diversi modi, in relazione al modo in cui vengono viste le variabili: al fine del nostro progetto, sembra importante realizzare percorsi didattici in cui la funzione venga vista come *covarianza* e si colga la relazione tra variabili dipendenti ed indipendenti. A tale scopo, si è cercato di realizzare una profonda interazione tra l'ambiente "carta e matita" e Cabri Géomètre all'interno di un percorso che parte dalla presa di coscienza della variabilità per arrivare all'individuazione di valori che soddisfino equazioni e disequazioni. Per quanto riguarda in generale l'utilizzo della tecnologia da parte degli studenti, ci sembra interessante il riferimento a Rabardel (1995), che distingue tra l'artefatto e lo strumento, ovvero l'artefatto insieme agli schemi d'uso che il soggetto elabora. L'artefatto diventa "strumento" quando il soggetto impara a gestire l'artefatto, apprende gli schemi d'uso condivisi socialmente e crea schemi d'uso personali. Per quanto riguarda l'inserimento del software nell'attività di classe, è interessante l'analisi di Assude e Gelis (2002) sulla dialettica "vecchio-nuovo", cioè l'alternarsi ed integrarsi di problemi tradizionali o innovativi in ambienti di lavoro diversi. Secondo questi autori Cabri Géomètre consente agli studenti di realizzare esperienze grafiche in prima persona, riflettere su molte configurazioni, esplorare l'effetto di trasformazioni. Questo è in linea con quanto osservato da Arzarello et al. (2002), che sottolineano come l'attività con Cabri possa promuovere stili cognitivi diversi e supportare le attività di esplorazione, produzione di una congettura, validazione, dimostrazione. La nostra ipotesi di ricerca è che gli schemi d'uso di Cabri, integrati con le attività in ambiente "carta e matita", facciano nascere e sviluppare le dinamiche mentali dei ragazzi, favorendo in particolare i meccanismi di anticipazione ed i controlli ascendenti e discendenti.
Il teaching experiment consiste in una serie di attività intorno ad un problema geometrico (costruzione di un quadrato inscritto in un quadrato) in cui si alternano modalità ed ambienti di lavoro differenti: (attività individuale e di gruppo in ambiente "carta e matita", attività di gruppo con Cabri, discussione collettiva in aula multimediale, con un solo computer gestito dall'insegnante su istruzioni dettate dai ragazzi). La descrizione dettagliata delle attività proposte sarà fornita durante la presentazione orale. Si discuteranno inoltre le prime evidenze di come le attività in un ambiente promuovono e favoriscono il pensiero produttivo nell'altro ambiente: ciò che germoglia nell'ambiente "carta e matita" si sviluppa e consolida nell'attività con Cabri Géomètre.

**Bibliografia**

Arzarello, F., Maschietto, M., Robutti, O.: 2001, (in stampa). Riflessioni su variabili e funzioni, SFIDA XIV, Genova.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., Robutti, P.: 2002, A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments, ZDM 2002, 34(3).

Assude, T. & Gelis, J.M.: 2002, La dialectique ancien-nouveau dans l'integration de Cabri-Géomètre à l'école primaire, *Educational Studies in Mathematics.*

Bazzini, L. & Tsamir, P.: 2002, Teaching implications deriving from a comparative study on the instruction of algebraic inequalities, *Proc.CIEAEM 54,* Vilanova y la Geltrue, Spain.

Rabardel, P.: 1995, *Les hommes et les tecnologies*, Armand Colin, Paris.

# Il Peer Tutoring in Matematica: un esempio di apprendimento cooperativo

Michele Pertichino, Antonella Montone, Eleonora Faggiano
Dipartimento di Matematica Università degli Studi – Bari

La tradizione della scuola italiana e la nostra esperienza ci dicono che una possibile abilità di integrazione di conoscenze e competenze non viene solo da uno studio scolastico della disciplina, ma anche dal confronto tra persone che della disciplina vedono aspetti e collegamenti diversi sulla base del loro bagaglio di esperienze scolastiche ed extrascolastiche. Del resto la capacità di sviluppare apprendimenti "in collaborazione con i propri pari più capaci" [8] non è sempre nella consuetudine della pratica scolastica che spesso rifiuta "la zona di sviluppo prossimale" ritenendo che soltanto quello che gli studenti sanno fare da soli sia indicatore delle loro capacità.

Da queste iniziali considerazioni si è sviluppata una didattica caratterizzata dallo scambio, dall'aiuto reciproco, dalla comunicazione dei propri processi che può consentire il superamento di quei ruoli rigidi e standardizzati all'interno della classe che implicitamente vincolano i successi e gli insuccessi personali.

In particolare, la strategia didattica del *tutoring*, sviluppatasi all'interno del *cooperative learning,* regola l'azione didattica sul rapporto *tutor-tutee*: una siffatta organizzazione consente di favorire un "apprendimento attivo e individuale"[6].

Sul piano metacognitivo tale strategia tende ad accrescere "un senso di orgoglio e di autoregolatezza e… fiducia e senso di responsabilità"[5]; mentre sul piano cognitivo sia il *tutor* sia il *tutee* traggono vantaggi considerevoli, seppur distinti. I *tutor*, seppur chiamati a trasmettere conoscenze gia in precedenza acquisite, traggono vantaggi cognitivi in quanto "rivedono o consolidano conoscenze già acquisite, colmano lacune, individuano altri significati e riformulano le proprie conoscenze in nuovi contesti, ma soprattutto è probabile che, dovendo utilizzare le conoscenze per uno scopo specifico, le assimilano meglio"[5]. I *tutee*, a loro volta, riceve "un feedback regolare e partecipe sulla correttezza dei propri sforzi ed [sono] soggetto a un attento monitoraggio che porta a massimizzare il tempo dedicato all'attività".

Nell'ottica della selezione e dell'organizzazione del sapere matematico il *peer tutoring* consente di "sfruttare" implicitamente la figura del "più bravo" non inteso come "detentore" del sapere ma come singolare "stratega" che, esplicitando i suoi processi mentali, consente ai "meno bravi" di individuare una nuova strada, di riconoscere i propri errori e di interiorizzare, mediante la discussione, tali "suggerimenti". Al contrario il rapporto tra "medio" bravi con un differenza minima di abilità consente un arricchimento reciproco e discussioni spontanee che l'accurato ruolo dell'insegnante può condurre ad una integrazione delle conoscenze.

Nell'ottica del recupero e della comprensione di determinati concetti matematici il *peer tutoring* consente l'esplicitazione di misconcetti, perplessità, incomprensioni varie (legate alla lettura dei testi dei problemi, alla scelta opportuna della strategia risolutiva,ecc.) in un rapporto che è sempre visto tra "pari" e in cui l'intervento del compagno-*tutor* è visto sempre nell'ottica del "consiglio" non del "giudizio". La correzione del *tutor*,le sue annotazioni, i suoi suggerimenti consentono di innestare un dibattito costruttivo, in cui ciascuna obiezione viene discussa e allo stesso tempo interiorizzata nel suo significato più pieno: "[…]l'urto dei nostri pensieri con quelli degli altri che producono in noi il dubbio e il bisogno di dimostrare"[2].

Il *peer tutoring*, dunque,rivaluta lo studente come detentore di conoscenze che, ricoprendo il ruolo di tutor per l'altro, in questa assunzione di responsabilità, facilita il processo di apprendimento. Si presenta come valore aggiunto per superare la paura del giudizio nonché dell'errore visto che il rapporto educativo realizzandosi tra pari non viene vissuto come sede di giudizi ma come sede di crescita.

**Riferimenti bibliografici**

[1] Dewey J., *Democracy and education*, The Macmillan Company, New York: trad. It. "Democrazia e educazione", La Nuova Italia, Firenze, 1949
[2] Piaget J., *Il linguaggio e il pensiero del fanciullo*, Giunti e Barbera, Firenze, 1962
[3] Cousinet R., *Une méthode de travail libre par groupes*, Les Editions du Cerf, Paris:trad. It. *Un metodo di lavoro libero per gruppi*, La Nuova Italia, Firenze, 1971
[4] de La Garanderie A., *I profili pedagogici*, La Nuova Italia, Firenze, 1991
[5] Pontecorvo C., Ajello A.M., Zucchermaglio C., *Discutendo si impara*, Carocci Editore, Roma, 1999
[6] Topping K., *The peer tutoring handbook*, Croom Helm Ltd.,Beckenham, kent,U.K.:trad. It. *Tutoring*, Edizioni Erickson ,Trento,1997
[7] Ancona R.L., Pupillo R., *Peer tutoring per la preparazione della terza prova agli esami di stato*, in Atti Convegno Nazionale Mathesis, Agerola, 2002 (in via di pubblicazione)
[8] Vygotskij L.S., *Il processo cognitivo,* Boringhieri, Torino, 1987

# L'apprendimento cooperativo nell'educazione matematica: una ricerca in collaborazione tra scuola e università

*Angela Pesci,* Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università di Pavia
*Anna Baldrighi,* Istituto Tecnico Statale "G. Cardano", Pavia
*Mariacristina Torresani,* Liceo Classico "A. Racchetti", Crema

In didattica della matematica sono state sviluppate alcune ricerche con l'obiettivo di costruire modelli di insegnamento-apprendimento che non solo tengano conto di specifici aspetti disciplinari ma si facciano anche carico delle problematiche legate alle emozioni, percezioni, credenze, storie, aspettative, delle persone coinvolte nella costruzione di conoscenza (Zan, Furinghetti), partendo dalla convinzione che ogni atto conoscitivo coinvolga sempre le persone in modo globale e sia dunque impossibile prescindere dalla considerazione di tale complessità.
Un modello di insegnamento–apprendimento che si fa carico, in modo esplicito, sia della dimensione disciplinare che della dimensione affettiva e sociale delle relazioni tra le persone della scena didattica, è quello dell'apprendimento cooperativo, che abbiamo realizzato in alcune classi di scuola secondaria. Riteniamo che tale modalità possa costituire una nuova interpretazione del sistema didattico (Insegnante-Alunno-Sapere, Brousseau, 1986), proprio perché non è solo focalizzata su relazioni di tipo disciplinare ma è bilanciata anche sulle relazioni interpersonali.
Su questa base si sono progettate e realizzate alcune esperienze, nella scuola media superiore, nell'ambito di un programma pilota denominato "Borse di ricerca per insegnanti", realizzato con una convenzione tra la Direzione Scolastica Regionale per la Lombardia e l'Università di Pavia e riservato ad insegnanti abilitati. In relazione alla matematica si sono condotti due progetti, fra loro complementari: "L'osservazione e la valutazione di alunni in difficoltà in esperienze di apprendimento cooperativo" (A. Baldrighi, su equazioni e disequazioni) e "Osservare e valutare competenze disciplinari e competenze sociali nell'apprendimento cooperativo" (M. Torresani, sulle isometrie piane). L'analisi sui risultati ottenuti ha messo in rilievo significative evoluzioni negli studenti, sia sul piano disciplinare della matematica che sul piano sociale ma anche l'urgenza di ulteriori indagini ed approfondimenti, anche in relazione alla preparazione degli insegnanti.

## Bibliografia

**Baldrighi A., Pesci A., Torresani M.,** 2003, Relazioni disciplinari e sociali nell'apprendimento cooperativo. Esperienze didattiche e spunti di riflessione, *Atti Matematica e Difficoltà n. 12*, Pitagora, 170-178
**Furinghetti F.**, 2002, *Matematica come processo socioculturale*, IPRASE Trentino
**Pesci A.**, 2002, Mathematics teachers and students: how can we improve the human side of their relationship?, *Proc. of the Conference "The Human Renaissance in Mathematics Education"*, Terrasini, A. Rogerson (Ed.), 11-19
**Zan R.**, 2002, Verso una teoria per le difficoltà in matematica, *Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica*, Pisa, 31/1-2/2 2002

Via Ferrata 1, 27100 - Pavia
*e-mail address*: pesci @dimat.unipv.it

---

1991 *Mathematics Subject Classification*. 00A35

# Sul curricolo di matematica negli Istituti Professionali

**Brunetto Piochi**, Dipartimento di Matematica, Università di Firenze
**Rosa Laura Ancona**, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bari

Le cifre della persistente dispersione scolastica per quanto riguarda gli Istituti Professionali [6] e ancor più le recenti innovazioni di legge pongono l'esigenza di lavorare sul curriculum di questo tipo di scuola secondaria, per evitare il rischio di perpetuarne un ruolo di fonte di emarginazione, ma anche per consentirvi la trasmissione di una reale "cultura disciplinare" non banale. Naturalmente ci concentriamo qui sulla matematica, ma analoghi ragionamenti potrebbero essere fatti su tutte le discipline. Ugualmente vogliamo rilevare come lo spunto per le considerazioni che proponiamo derivi da esperienze fatte con esito estremamente positivo con alunni disabili ([1], [2], [3]), ma proprio la realizzazione pratica di tali esperienze ha dimostrato come anche gli alunni normodotati possano trarne vantaggio sul piano didattico.
Recuperando lo spirito della riforma degli Istituti Professionali attuata con il Progetto 92 [5], si può "promuovere l'elevazione del livello culturale dei curricoli" finalizzando la proposta al conseguimento di competenze professionali specifiche (un esame degli attuali curricoli mostra come sia stata interpretata nei fatti tale intenzione: si è ad esempio offerta *la medesima formazione matematica* a tutti i 15/16-enni italiani, indipendentemente dal tipo di scuola scelto e parificandola in pratica alla proposta dei licei classici !). Tale impostazione si è ben presto scontata con le difficoltà reali dei soggetti interessati, i quali assai spesso scelgono un Istituto Professionale perché cercano una scuola più operativa.
Crediamo però che lo stesso Progetto 92 sia in grado di offrire una strada efficace per un ripensamento dei contenuti dell'insegnamento, e coerentemente delle modalità di valutazione del loro apprendimento, dato che esso propone dei "profili professionali" specifici ai quali è possibile riferirsi per individuare le competenze di base necessarie per trasferire e utilizzare in "contesti significativi" gli apprendimenti matematici. A titolo di esempio, riportiamo qui di seguito una tabella che analizza le competenze matematiche sottese a uno di tali profili professionali, come punto di partenza per uno studio della proposta curricolare corrispondente (si veda [4] per altri esempi).

| *Competenze relative al Profilo Professionale* | *Competenze matematiche relative* |
|---|---|
| È capace di eseguire con discreta autonomia la preparazione di piatti caldi e freddi. | 1. Problem solving e problem posing; 2. Figure geometriche- Simmetrie e altre trasformazioni; 3. Rapporti e proporzioni; 4. Algoritmi e loro rappresentazione; 5. Misura; 6. Costanti, variabili. |
| È in grado di valutare le merci all'entrata e soprattutto i prodotti in uscita. | 1. Costanti, variabili, formule; 2. Misura; 3. Informatica di base e software specifici. |
| È capace di predeterminare i tempi di esecuzione del lavoro (specie in relazione alle richieste della Sala). | 1. Algoritmi e loro rappresentazione; 2. Misura;<br>3. Rapporti e proporzioni;<br>4. Informatica di base e software specifici. |
| È in grado di partecipare al calcolo dei costi sia dei singoli piatti che dei menù. | 1. Costanti, variabili, formule; 2. Equazioni di 1° e 2° grado; 3. Problem solving e problem posing;<br>4. Proporzionalità diretta e inversa; 5.Percentuali e sconti. |
| È in grado di partecipare all'elaborazione di menù giornalieri e rotativi. | 1. Misura; 2. Problem solving e problem posing;<br>3. Costanti, variabili, formule. |

## Riferimenti bibliografici

[1] Ancona R.L., Angiulo A., Pupillo R., *Alcuni esempi di programmazione e valutazione negli istituti professionali*, In Bruno Longo P., Davoli A. e Sandri P. (a cura di), *Osservare, valutare, orientare gli alunni in difficoltà*, Pitagora ed., Bologna, pp. 154-161, 2003

[2] Angiulo A. e Pertichino M. 2002, *L'esperienza di Beatrice dentro, contro, con la matematica: un percorso di apprendimento nella secondaria superiore*. In Contardi A. & Piochi B. (a cura e con introduzione di), *Le difficoltà nell'apprendimento della matematica. Metodologia e pratica di insegnamento*, Ed. Erickson, Trento, pp. 247-258

[3] Cocchi M. e Sandri P. 2000, *L'educazione matematica nei percorsi scuola-lavoro: alcune riflessioni*. In D'Amore B., Livorni L., Meloni G. e Pesci A. (a cura di), *Interdisciplinarietà e integrazione*, Bologna, Pitagora, pp. 67-74

[4] Contardi A., Pertichino M. e Piochi B., 2003, *Istituti Professionali: programmazione e valutazione in matematica*. In Bruno Longo P., Davoli A. e Sandri P. (a cura di), *Osservare, valutare, orientare gli alunni in difficoltà*, Pitagora ed., Bologna, pp. 141-153

[5] Direzione Generale Istruzione Professionale, Progetto '92, *Aggiornamenti per l'insegnamento della matematica*, M.P.I.

[6] MIUR (Ufficio Statistica) 2002, *Indagine campionaria sulla dispersione scolastica nelle scuole statali elementari, medie e superiori. Anno scolastico 2001-2002*, Roma, SISTA.

# Attività di laboratorio di matematica con un Computer Algebra System fra scuola media e biennio

*Maria Reggiani*
Dipartimento di Matematica, Università di Pavia

La diffusione dei Computer Algebra System (C.A.S.) sia nelle versioni per personal computer sia in quelle contenute nelle calcolatrici grafico simboliche è oggetto di attenzione da parte della ricerca didattica. In particolare moltissimi studi si sono occupati della possibilità di rendere accessibili agli alunni problemi significativi dal punto di vista dei contenuti ma troppo complessi dal punto di vista dei calcoli, altri della ricaduta della diffusione di tali sistemi sulle competenze degli alunni in algebra e analisi, altri ancora delle possibilità di visualizzazione offerte dalle potenzialità grafiche di questi software. La maggior parte di tali studi, soprattutto se realizzati con C.A.S. non "didattici", prendono in considerazione problemi che possono essere proposti ad alunni che hanno già una buona competenza nell'algebra di base. Esistono poi C.A.S. "didattici", quali l'Algebrista, che si rivolgono in modo specifico ad alunni principianti allo scopo di favorire la riflessione sulle proprietà algebriche e sul loro uso.

In questo intervento si vogliono proporre e discutere due attività svolte con un C.A.S., che pur essendo molto usato a scopi didattici, non è un software didattico, *Derive* per Windows, e rivolte ad alunni di scuola media e biennio non esperti nella manipolazione algebrica. La prima è stata elaborata nell'ambito di un Progetto SeT e si propone di potenziare le capacità di usare il linguaggio algebrico come strumento di risoluzione di problemi e di avviare all'uso consapevole del calcolo letterale in una terza media. Scopo della ricerca è verificare se la presenza del C.A.S. favorisce o meno questi obiettivi e di studiare l'uso che gli alunni fanno del software. L'altra, svolta in verticale fra scuola media e biennio, propone un itinerario che porta alla costruzione e allo studio dell'equazione della retta, a partire da problemi di proporzionalità, attraverso l'uso di differenti funzioni e comandi del software, in particolare della funzione "vector" che consente costruzioni per punti e rappresentazioni parametriche.

A partire dai risultati di queste attività si evidenzieranno rischi e possibili ricadute positive dell'uso di C.A.S. a questo livello di età e di competenze.

**Riferimenti bibliografici**

CERULLI M., MARIOTTI M.A., 2002: L'Algebrista: un micromonde pour l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre, *Sciences et techniques éducatives*, Lavoisier, vol.9, n.1-2
CHIAPPINI G.,REGGIANI M. 2003:Toward a didactic practice based on mathematics laboratory activities, *CERME 3*
GIULIANI E., TAGLIABUE V., 2002, Approccio all'algebra con DERIVE. *Unità didattica nell'ambito del Progetto SeT:* http://www.indire.it/set/area1_esperienzescuole/cm131/5.htm
REGGIANI M., 2002, Arithmetic, algebra and technology: a study on beginner pupils, *International Conference The Humanistic Renaissance in Mathematics Education* , 20-25/9/2002, Palermo, 312-316

Dipartimento di Matematica "F. Casorati", via Ferrata 1, 27100 Pavia
*E-mail address*: reggiani@dimat.unipv.it

1991 *Mathematics Subject Classification* 00A35

# Il senso del grafico: un progetto in continuità dalla scuola materna alla scuola superiore

*Ornella Robutti*, Dipartimento di Matematica, Università di Torino

## Il progetto didattico

L'insegnamento della matematica è caratterizzato negli ultimi anni da un dibattito, a livello internazionale, centrato principalmente su tre temi portanti: l'individuazione di filoni (nuclei fondanti, o temi che dir si voglia) che caratterizzano un percorso verticale attraverso tutti i livelli scolari (UMI, 2001 e 2003); la metodologia di tipo laboratoriale, che favorisce un apprendimento percettivo-motorio piuttosto che uno simbolico-ricostruttivo (Antinucci, 2001; Monk & Nemirovsky, 1994); l'uso di strumenti, poveri o costosi, classici o tecnologici, che possano favorire l'apprendimento (Arzarello & Robutti, 2001; Artigue, 2001). In Italia tale dibattito ha dominato gli ultimi anni, anche perché legato a quello istituzionale della riforma della scuola. Ad esso hanno partecipato le varie Associazioni Disciplinari, in modo particolare l'UMI. Il presente lavoro si colloca in questo dibattito, ed è caratterizzato fortemente dai tre temi di cui sopra.

L'obiettivo legato a queste tre tematiche è la costruzione del senso del grafico, come insieme di competenze ampie e a lungo termine, che possano essere utilizzate in vari contesti e in tempi diversi.

Sulla base di questi e di altri elementi teorici, relativi all'apprendimento della matematica in contesti esperienziali e in interazione con gli strumenti, ho realizzato alcuni *teaching experiment* in varie classi di livelli scolari diversi: 6 classi (gruppi omogenei) di scuola materna; 2 classi di scuola elementare; 3 classi di scuola media; 3 classi di scuola superiore.

## La ricerca

Le esperienze realizzate in classe consistono nell'effettuare moti di vario tipo e nel vederli rappresentati con grafici e tabelle sullo schermo della calcolatrice, che riceve dal sensore i dati di misura di distanze e tempi. Gli strumenti teorici forniti dalla ricerca, utilizzati per interpretare il processo di concettualizzazione, sono: il quadro dell'approccio strumentale, fornito dalla scuola francese (es. Artigue, 2001); il quadro cognitivo, fornito da contributi vari, che vanno dalla semiotica (es. Radford, 2001) all'*embodied cognition* (es. Lakoff & Nùñez, 2000); il quadro che tiene conto del ruolo dell'insegnante; il quadro istituzionale (ossia i programmi di matematica vigenti).

### Bibliografia


Antinucci, F.: 2001. *La scuola si è rotta*, Laterza, Bari.

Artigue, M.: 2001. Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *2° CAME Symposium*, Utrecht, The Netherlands.

Arzarello, F. & Robutti, O.: 2001. From Body Motion to Algebra through Graphing, in: H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (ed.), *12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra*, Melbourne, Australia, December 9-14, 2001, vol.1, 33-40.

Lakoff, G. & Nùñez, R.: 2000. *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.

Monk, S. & Nemirovsky, R.: 1994. The case of Dan: Student contruction of a functional situation through visual attributes, *Research on Collegiate Mathematics Education* 1, 139-168.

Radford, L.: 2001. Factual, contextual and symbolic generalizations in algebra, *Proceedings of PME25*, 4, 81-88.

UMI: 2001. *Matematica 2001. Materiali per un nuovo curriculo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica (scuola elementare e scuola media)*. Esposito, Napoli.

UMI: 2003. Matematica 2003. *Materiali per un nuovo curriculo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica (scuola superiore).*


Via Carlo Alberto 10, 10123 – Torino – e-mail: robutti@dm.unito.it

# La congettura di Goldbach tra storia e didattica

Aldo Scimone (aldo.scimone@libero.it)

G.R.I.M. (Gruppo di Ricerca per l'Insegnamento delle Matematiche) Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Palermo, via Archirafi, 34-90123 Palermo

È molto esteso, oggi, il campo degli studi dedicati alle relazioni tra la storia della matematica e l'educazione matematica, per cercare di comprendere meglio in che modo la prima disciplina possa interagire con la seconda per sciogliere alcuni nodi concettuali o per far fronte agli ostacoli epistemologici che possono sorgere durante la fase di apprendimento della matematica da parte degli alunni. Lo scopo di questa ricerca è stato quello di esaminare le concezioni degli allievi di fronte a una delle più famose congetture storiche della teoria dei numeri, ancora oggi non risolta, e dovuta a Christian Goldbach (1690-1764), che la formulò in una lettera del 1742 scritta a Eulero. Essa afferma che *ogni numero pari maggiore di 4 può essere scritto come somma di due numeri primi dispari*. Il quadro teorico di riferimento per la ricerca è stato la teoria delle situazioni didattiche di G. Brousseau, basandosi su due ipotesi di ricerca da validare o confutare, relative alla non capacità degli alunni di sapere concepire un piano d'attacco di dimostrazione, e di contro alla loro capacità di riconoscere la validità della congettura in modo euristico. È stata approntata, quindi, una situazione a-didattica in cui alunni appartenenti a tutti gli ordini scolastici si sono confrontati con la congettura, cercando di dimostrarla dopo una fase di argomentazione. I comportamenti degli alunni sono stati analizzati e classificati in base ad alcune analisi a-priori (secondo i vari livelli scolastici) basate in massima parte sui tentativi fatti dai matematici, dal 1742 a oggi, per dimostrare o confutare la congettura. L'apporto della storia della matematica è stato determinante proprio in questa fase importante della sperimentazione. Quest'ultima è stata attuata attraverso lavori individuali, di gruppo e interviste registrate o filmate. I dati sono stati analizzati quantitativamente e qualitativamente. L'analisi quantitativa è stata effettuata utilizzando il software di statistica inferenziale CHIC 2000 e quello di analisi statistica fattoriale S.P.S.S., mentre per l'analisi qualitativa si sono usati vari tipi di descrittori. Le ipotesi di partenza sono state nella maggior parte dei casi validate, ma in altri falsificate. Inoltre, è emerso il dato importante che tra gli alunni l'approccio abduttivo e deduttivo alla congettura si sono rivelati più consoni di quello intuitivo. I risultati della ricerca hanno messo in evidenza anche alcuni inattesi misconcetti, come, per esempio, la convinzione che per *postulato* si intenda in matematica qualsiasi affermazione che non si sappia dimostrare; nonché alcuni nodi concettuali presenti nella fase di passaggio dall'argomentazione alla dimostrazione. Ciò ha fatto sorgere alcuni interrogativi su varie questioni per rispondere alle quali bisognerà approntare altre sperimentazioni per approfondire i nessi tra il congetturare, l'argomentare e il dimostrare.

**Bibliografia**

1. Arzarello F., Micheletti C., Olivero F., Paola D, & Robutti A., *A model for analysing the transition to formal proof in geometry*, Proc. PME XXII, Stellenbosch, vol. 2, 24-31, 1998.
2. Brousseau G., *Theory of didactical situations in mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1997.
3. D'Amore B., *Elementi di Didattica della Matematica*, Pitagora Editrice, 1999.
4. Scimone A., *Conceptions of pupils about an open historical question: Goldbach's conjecture. The improvement of mathematical education from a historical viewpoint*, PhD Thesis of the University of Bratislava, 2003.
5. Spagnolo F., *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*, La Nuova Italia Editrice, 1998.

1991 *Mathematics Subject Classification*. 97C30: *Problem solving, Goldbach's conjecture, demonstration.*

# *Argomentare, congetturare, dimostrare nella scuola di tutti: l'ipotesi di un curricolo dalla scuola materna alle scuole secondarie superiori.*

***Un'esperienza nelle scuole di Piazza Armerina***

***Filippo Spagnolo*[1]**

Durante l'anno scolastico 2001/2002 è stata condotta una sperimentazione presso l'istituto onnicomprensivo "Capuana" di Piazza Armerina[2]. La sperimentazione è stata finanziata dal C.S.A. di Enna.

L'ipotesi di partenza del progetto di Piazza Armerina ha avuto come obiettivo quello di poter **elaborare un curriculo** su di un'area trasversale (dalla materna alle scuole secondarie superiori) nell'insegnamento/apprendimento delle Matematiche riguardante **l'argomentare, congetturare e dimostrare**. Le attività di argomentare, congetturare e dimostrare sono delle attività particolarmente significative per lo sviluppo del pensiero matematico e nello stesso tempo stabiliscono delle relazioni con altri ambiti disciplinari.

Nel lavoro di Matematica 2001[3] viene presentata una proposta curriculare riguardante anche l'area trasversale dell'argomentare e congetturare. La particolarità di questa esperienza è quella di estendere al "dimostrare" questa area trasversale e **proporre l'elaborazione del curriculo attraverso un'attività teorico-sperimentale.**

Sono coinvolte nel progetto una diecina di scuole di Piazza Armerina (Enna) dalla scuola materna alle scuole superiori. Gli insegnanti coinvolti nell'esperienza sono stati divisi in quattro gruppi, ciascun gruppo ha affrontato argomenti differenti. In ciascun gruppo erano rappresentati insegnati dei differenti livelli scolastici. Sono stati svolti due stages di due giornate mezza ciascuno. In ciascuno di questi stage i gruppi hanno lavorato in alcuni momenti tutti assieme utilizzando le competenze di ciascun livello scolare e anche per livelli scolastici paralleli.

Possiamo così riassumere l'ipotesi principale:

**H1: Quali sono le condizioni teorico/sperimentali per poter elaborare un curricolo per l'insegnamento dell'argomentare, congetturare e dimostrare dalla scuola materna alle scuole secondarie superiori?**

Per poter ricercare queste condizioni ci si è serviti di un Paradigma[4] di Ricerca in Didattica delle Matematiche[5] . Tale paradigma si appoggia sulla Teoria delle Situazioni Didattiche di Guy Brousseau[6] rivisitato da Filippo Spagnolo[7].

Tutto il lavoro di argomentare, congetturare, dimostrare è stato analizzato nel passaggio tra la fase di formulazione e validazione delle situazioni a-didattiche.

Non possiamo trarre delle conclusioni generali da questa esperienza ma possiamo senz'altro affermare che sono stati raggiunti dei livelli di consapevolezza metacognitiva rilevanti. Questo si può evincere sia dai risultati quantitativi che qualitativi. L'analisi qualitativa oltre ad essere stata condotta attraverso dei protocolli è stata anche filmata e alcuni filmati sono stati collegati alle fasi argomentative. Tutto il lavoro si trova pubblicato nella rivista "Quaderni di Ricerca in Didattica" Supplemento al n.10. La rivista si trova all'indirizzo web:
http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quadernosuppl10.htm .
Nella versione on-line della rivista si possono trovare i filmati collegati con l'analisi qualitativa dell'esperienza.

---

[1] Facoltà Scienze della Formazione Università di Palermo. Componente del G.R.I.M. (Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche, Dipartimento di Matematica, Palermo). E-Mail: spagnolo@math.unipa.it.

[2] Il dirigente scolastico che ha coordinato il progetto per tutto l'anno è stata Carmela Trovato. Attualmente il progetto è coordinato dal Dirigente Scolastico Giuseppe Russo (Istituto d'Istruzione Superiore "Gen A. Cascino).

[3] Il materiale di Matematica 2001, curato dalla C.I.I.M. (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica) si trova in rete al seguente indirizzo: **http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/arzarello/**

[4] Un insieme di problemi e metodi relativi alla loro risoluzione in un determinato periodo campo ed in un determinato periodo storico individuano un "Modello" di ricerca che viene indicato con il termine "Paradigma" (nel senso di Kuhn).

[5] Per ulterioiri approfondimenti sull'argomento vedasi:
1. F. Spagnolo, *La Comunicazione delle Matematiche*, La Nuova Italia Editrice (di prossima pubblicazione).
2. F. Spagnolo, *Obstacles epistemologiques: Le Postulat de Eudoxe-Archimede*, Quaderni di Ricerca in Didattica,Supplemento al n. 5, Palermo, 1995. (Tesi di Dottorato, Bordeaux, 31.7.1995)

[6] - G. Brousseau G., "Theory of Didactical situations in mathematics". 1970-1990" (304 pages) traduction M. Cooper,
- N. Balacheff, Rosamund Sutherland et Virginia Warfield. (KLUWER Academic Publishers), 1997.
- G. Brousseau, Théorie des Situations didactiques, La pensée Sauvage, Grenoble, 1998

[7] F. Spagnolo, Insegnare le matematiche nella scuola secondaria, La Nuova Italia, Firenze, 1998, Italia.
- F. Spagnolo, Semiotic and hermeneutic can help us to interpret teaching/learning?, Palm Cove (Cairns, Australia), International Conference on Mathematics Education into the 21st Century, August 2001. (http://math.unipa.it/~grim/21project.htm).

# Un’introduzione al concetto di equazione

*Rosa Tafuto* (rtafuto17@libero.it) I. T. C. “A. Torrente”, Casoria (Napoli) e
Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università Federico II, Napoli

Il presente lavoro è il resoconto di una attività svolta in una classe seconda di un istituto tecnico commerciale, all’inizio di quest’anno scolastico, da un’ex insegnante elementare che per anni ha adottato nelle sue classi la metodologia della discussione come strumento per la costruzione della conoscenza. Giunta alle scuole superiori mi è parso naturale continuare ad “insegnare” come avevo sempre fatto cercando modalità significative di indagine dei contenuti matematici e dei pensieri dei miei alunni. L’argomento trattato, un’introduzione al concetto di equazione, si propone sia obiettivi di carattere disciplinare, fra i quali in particolare il chiarimento dell’uso del segno “=”, nel delicato passaggio da aritmetica ad algebra e sotto il doppio profilo semantico e sintattico, sia obiettivi più generali come un approccio sereno alla matematica e ai problemi, e la capacità di lettura e di utilizzo del libro di testo. Tali obiettivi vengono perseguiti attraverso un metodo didattico e una scansione delle attività che prevede: 1. la “discussione” in situazione di problem-solving; 2. l’uso sistematico della rappresentazione grafica, qualitativa e quantitativa; 3. la verbalizzazione scritta individuale o di gruppo e l’analisi collettiva dei procedimenti risolutivi; 4. la riflessione sugli invarianti operazionali e la metadiscussione; 5. la lettura ed analisi dell’argomento dal libro di testo.

Agli alunni, che possedevano una buona conoscenza delle procedure del calcolo letterale e del concetto di uguaglianza, sono stati proposti in successione tre problemi (uno di aritmetica, uno di geometria e l’ultimo legato ad un contesto non matematico), la cui risoluzione richiede l’uso di un’equazione di primo grado in una incognita. Il mio scopo era di ricostruire, attraverso la ricerca di un procedimento risolutivo dei problemi, i principi di equivalenza, e di dare “significato” al calcolo letterale. Gli studenti hanno lavorato in gruppi di tre o quattro; è stata loro richiesta preliminarmente un’analisi qualitativa dei dati e delle relazioni contenute nei problemi, poi di risolverli graficamente e solo successivamente di tradurre le rappresentazioni in relazioni simboliche. Nella discussione collettiva gli studenti: a) sono stati “obbligati” a spiegare il perché del loro procedimento: nel raccontare, sono dovuti ritornare continuamente al testo del problema, e ciò ha evidenziato l’importanza di una lettura attenta e di una decodifica condivisa del testo; b) hanno dovuto mostrare la coerenza tra le rappresentazioni e le relazioni, e la possibilità di trasferimento dei principi di equivalenza intuiti in ambito grafico alla rappresentazione simbolica: questo ha evidenziato l’importanza di una rappresentazione “sensibile” per capire e ragionare; c) hanno dovuto cercare termini adeguati, tra linguaggio naturale e simbolico, per comunicare con me e con gli altri; d) hanno applicato le regole del calcolo letterale a relazioni algebriche, da loro ricavate a partire da situazioni concrete, giungendo a riconoscere nella scrittura simbolica uno strumento atto ad esprimere in modo sintetico e appropriato relazioni di diverso valore semantico; e) hanno letto l’argomento “equazioni” dal libro di testo e hanno cercato differenze di contenuto e di linguaggio, per confrontarle con le conoscenze costruite in classe. L’attività del problem-solving è stato l’ambiente “protetto ed indirizzato” all’interno del quale gli alunni hanno cominciato ad esplorare la loro zona di sviluppo prossimale. La metodologia della discussione collettiva, prima in piccoli gruppi, poi all’interno della comunità classe, ha conferito ai contenuti spessore di significato, frutto delle varie argomentazioni richieste a sostegno di ogni intervento, e della condivisione delle idee e delle rappresentazioni. L’analisi qualitativa (con le parole del linguaggio naturale e del linguaggio simbolico), ha amplificato le potenzialità del linguaggio stesso e ciò si è riflesso sui pensieri, che sono apparsi meglio organizzati.

## Bibliografia essenziale

Arcavi, A.: 1994, Symbol Sense: informal Sense-making in formal Mathematics, *For the Learning of Mathematics*.

Arzarello, F., Bazzini, L., Chiappini, G.: 1994, L’algebra come strumento di pensiero, Progetto CNR, quaderno 6.

Bartolini Bussi M. G., Boni, M., Ferri, F.: 1995, Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica, CDE, Modena.

Vygotskij, L. S.: 1987, Il processo cognitivo, Boringhieri, Torino.